# CHAPITRE 3 GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

## I. RESUME DE COURS

### Continuité

**1) Définitions**

**f est continue en $x_0$** $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

**On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point de I.**

**2) Propriétés**

- **Les fonctions polynômes, la fonction sinus, la fonction cosinus sont continues sur IR.**
- **La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$.**
- **Une fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.**
- **La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.**

  **Autrement dit :**

  - **Si u et v sont continues sur I, alors :**
    - **Les fonctions ku, u + v, u × v et $u^n$ (k réel et n entier naturel non nul) sont continues sur I.**
    - **Les fonctions $\frac{1}{u}$, $\frac{u}{v}$, $\sqrt{u}$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies.**
  - **Si la fonction f est continue en a et si la fonction g est continue en f(a) alors la fonction gof est continue en a.**

**3) Prolongement par continuité**

$\left| \begin{array}{l} \bullet\ a \notin D_f \\ \bullet \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell; \quad \ell \in \mathbb{R} \end{array} \right\rangle \Rightarrow$ **f admet un prolongement par continuité g au point a**

**Le prolongement de f est la fonction g définie par:**

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si} \quad x \in D_f \\ g(a) = \ell \end{cases}$$

## 4) Fonctions continues sur un intervalle

**Par une fonction continue :**

**L'image d'un intervalle est un intervalle.**

**L'image d'un segment est un segment.**

## 5) Théorème des valeurs intermédiaires

| | | |
|---|---|---|
| • f est continue sur I<br>• f(I)=J<br>• $m \in J$ | $\Rightarrow$ | l'équation $f(x) = m$ admet au moins une solution dans I |
| • f est continue sur $[a,b]$<br>• m est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ | $\Rightarrow$ | l'équation $f(x) = m$ admet au moins une solution dans $[a,b]$ |
| • f est continue sur $[a,b]$<br>• $f(a) \times f(b) \leq 0$ | $\Rightarrow$ | l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a,b]$ |

## 6) Théorème de la bijection réciproque

| | | |
|---|---|---|
| • f est continue sur I,<br>• f est strictement monotone sur I,<br>• $f(I) = J$. | $\Rightarrow$ | • $f : I \to J$ est bijective.<br>• $f^{-1}$ est continue sur J.<br>• $f^{-1}$ est de même sens de variation de f.<br>• $f^{-1}$ est bijective de J sur I.<br>• les courbes de f et $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. |

**Remarques**

**Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$. Le théorème de la bijection réciproque en assure l'unicité.**

## Dérivation

### 1) Nombre dérivé – dérivabilité

| f est dérivable au point $x_0$ | $\Leftrightarrow$ | $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est un nombre réel |
|---|---|---|

**Nombre dérivé :** $f'(x_0)=\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

**f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point $x_0$ de I.**

- **Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I ( La réciproque est fausse).**

### 2) Dérivées usuelles

| Fonction | Dérivée | Domaine de dérivation |
|---|---|---|
| k réel (Constante) | 0 | $]-\infty,+\infty[$ |
| ax+b | a | $]-\infty,+\infty[$ |
| $x^n, n>0$ | $nx^{n-1}$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0,+\infty[$ |

| Fonction | Dérivée | Domaine de dérivation |
|---|---|---|
| $\sin x$ | $\cos x$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x$ | $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ |
| $\ln\|x\|$ | $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $]-\infty,+\infty[$ |

## 3) Opérations sur les dérivées

| Fonction | Dérivée |
|---|---|
| $au$ | $au'$ |
| $u+v$ | $u'+v'$ |
| $u \bullet v$ | $u' \bullet v + u \bullet v'$ |
| $\frac{1}{u}$ | $\frac{-u'}{u^2}$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u' \bullet v - u \bullet v'}{v^2}$ |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $(u)^n$ | $nu'(u)^{n-1}$ |
| $u \circ v$ | $v'.(u' \circ v)$ |

## 4) Dérivée de la réciproque

- $f : I \to J$ est bijective,
- f est dérivable sur I,
- $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

$\Rightarrow$

- $f^{-1}$ est dérivable sur J,
- $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

- $f(a) = b$
- $f'(a) = c$

$\Rightarrow$

- $f^{-1}(b)=a$
- $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{c}$

## 5) Inégalités des accroissements finis

- f est dérivable sur I,
- $a, b \in I$, $a < b$,
- il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ sur I.

$\Rightarrow$ $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

- f est dérivable sur I,
- il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $|f'(x)| \leq M$ sur I.

$\Rightarrow$ $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

## Courbes : symétries – asymptotes – tangentes

**Soit f une fonction numérique et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.**

### 1) Eléments de symétrie

| Si, pour tout $x \in D_f$, on a $2a - x \in D_f$ et … | alors, C admet … |
|---|---|
| $f(2a-x) = f(x)$ | la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie. |
| $f(2a-x) = 2b - f(x)$ | le point $M(a,b)$ comme centre de symétrie. |
| $f(-x) = f(x)$ | l'axe (Oy) comme axe de symétrie et f est paire. |
| $f(-x) = -f(x)$ | l'origine O comme centre de symétrie et f est impaire. |

### 2) Asymptotes parallèles aux axes

| Si… | alors la courbe $C_f$ possède une asymptote … |
|---|---|
| $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ | **verticale** d'équation $x = x_0$ |
| $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$ | **horizontale** d'équation $y = y_0$ |

### 3) Asymptote oblique et branches paraboliques

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, on calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Trois cas se présentent :

| Si… | alors… |
|---|---|
| $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ | C admet une <u>branche parabolique</u> de direction (Oy) en $+\infty$. |
| $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ | C admet une <u>branche parabolique</u> de direction (Ox) en $+\infty$. |

| | |
|---|---|
| $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ; $a\in\mathbb{R}^*$ | **on calcule** $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ **:** |

- **Soit** $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\infty$**, alors C admet une branche parabolique de direction la droite d'équation** $y=ax$
- **Soit** $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$ **,avec** $b\in\mathbb{R}$**, alors C admet une asymptote oblique, c'est la droite d'équation** $y=ax+b$ **.**

**Cela est équivalent à chacune des situations suivantes :**

| | |
|---|---|
| $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ | $\begin{cases} f(x)=ax+b+\varphi(x), & a\neq 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0 \end{cases}$ |

**Le signe de** $d(x)=f(x)-(ax+b)$ **détermine les positions relatives de C et son asymptote oblique.**

***N.B : les définitions ci-dessus sont analogues lorsque x tend vers*** $-\infty$.

**4) Tangentes**

| Si.. | alors… |
|---|---|
| **f est dérivable en** $x_0$ | **C admet une tangente en** $M_0(x_0,y_0)$ |
| **D est la tangente à C en** $M_0(x_0,y_0)$ **D n'est pas verticale.** | **L'équation de D :** $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ |
| **la tangente D// la droite d'équation** $y=\mu x+\delta$ | $f'(x_0)=\mu$ |
| **la tangente D** $\perp$ **la droite d'équation** $y=\mu x+\delta$ | $\mu f'(x_0)=-1$ |
| **la tangente D est horizontale** | $f'(x_0)=0$ |
| $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ | **C admet une tangente (ou demi tangente) verticale d'équation** $x=x_0$**.** |

## II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

### QCM 1

On considère une fonction numérique f dérivable sur son domaine de définition $D_f$, de dérivée $f'$. Son tableau de variation est donné ci-dessous. On nomme (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

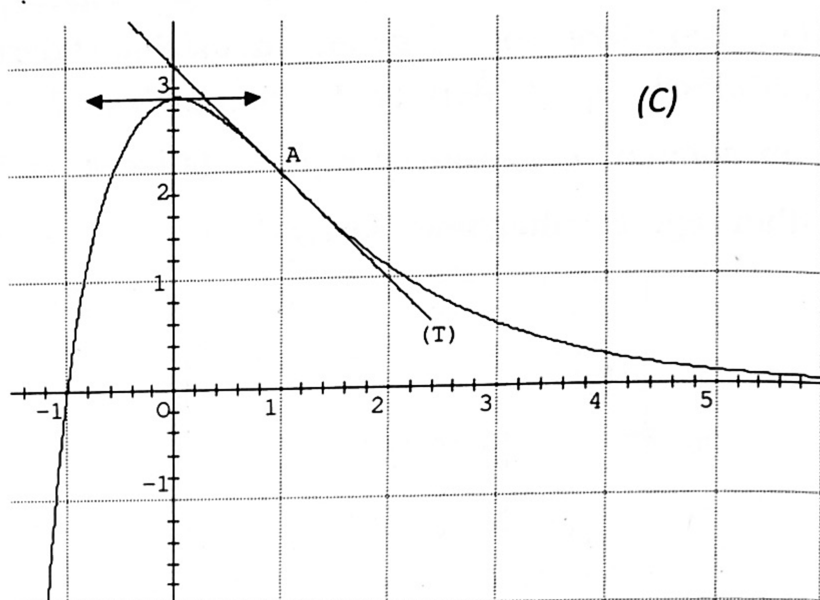
| x | $-\infty$ | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | ‖ | - | 0 | + | |
| f(x) | $-3$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

**Pour chaque question, parmi les réponses proposées, une seule réponse est exacte. Préciser la bonne réponse.**

| N° | Question | Réponse A | Réponse B | Réponse C | Réponse D |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | L'ensemble de définition de f est : | $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ | $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ | $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ | $\mathbb{R}$ |
| 2 | L'équation $f(x)=0$ admet dans $D_f$ exactement : | 3 solutions | 2 solutions | 1 solution | aucune solution |
| 3 | La courbe (C) admet une asymptote d'équation : | $x=3$ | $x=2$ | $y=2$ | $y=3$ |
| 4 | La fonction f est une fonction : | paire | impaire | ni paire ni impaire | monotone |
| 5 | L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0=3$ est : | $x=1$ | $y=2$ | $y=3x+2$ | $y=2x+3$ |
| 6 | $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ est égale à : | 0 | -3 | $-\infty$ | $+\infty$ |

## QCM 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la courbe (C) ci-contre représente une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite $(T)$ est tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse 1. La droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.




La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

**Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Préciser la bonne réponse.**

| N° | Question | Réponse A | Réponse B | Réponse C | Réponse D |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | On a | $f(0)=0$ | $f'(0)=e$ | $f'(0)=0$ | $f(0)=-1$ |
| 2 | Le coefficient directeur de la droite $(T)$ est égal à : | 0 | 1 | -1 | 3 |
| 3 | On a | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ | $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=6$ |
| 4 | L'équation $f(x)=2$ | n'a pas de solution | a une unique solution | a deux solutions | a trois solutions |
| 5 | On a | $f(1)=0$ | $f(1)=1$ | $f(1)=2$ | $f(1)=3$ |
| 6 | $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dots$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | 1 |

## III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

### Exercice 1

Calculer les limites suivantes (Expliquer la méthode de levée d'indétermination):

$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}$

$\lim_{x\to 3}\frac{x^{10}-3^{10}}{x-3}$

$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})$

### Exercice 2

Soit $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Calculer $\lim_{x\to 1}f(x)$ par trois méthodes

### Exercice 3

Calculer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-x$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

### Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=-x^4+2x^2+x$ et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A(–1, 0).

2) Montrer que cette droite est aussi tangente à (C) en un autre point que l'on précisera.

3) Montrer que la courbe (C) admet des tangentes horizontales en trois points d'abscisses $\alpha,\beta$ et $\gamma$ vérifiant : $-0,9<\alpha<-0,8$, $-0,3<\beta<-0,2$ et $1,1<\gamma<1,2$.

**Exercice 5**

Déterminer les réels *a*, *b*, *c* pour que la courbe de la fonction $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ :

- passe par le point A(2 ; 4),
- admette au point A(2 ; 4), une tangente horizontale, et
- aie au point d'abscisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x+4$

2) Vérifier que le point $\Omega\left(1;\frac{4}{3}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

**Exercice 6**

Soit $g(x)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$.

1) Dresser le tableau de variations de $g$.

2) Montrer que la courbe $(C)$ de $g$ admet deux asymptotes dont l'une $(D)$ est oblique et préciser la position de $(D)$ par rapport à $(C)$.

3) Déterminer la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3. Déterminer la position de (T) par rapport à (C).

4) Tracer soigneusement (T), (D) et (C) dans un repère orthonormé.

5) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $4x^2-(3m+7)x+3m+7=0$. Retrouver les résultats algébriquement.

## Exercice 7

1) Soit $P(x) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$.

Déterminer une racine évidente de *P*, factoriser *P* et déterminer son signe.

2) Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$, soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

a) Déterminer $D_f$ l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que f est dérivable sur $D_f$. Calculer sa dérivée et vérifier que $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2+3)^2}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

3.a) Trouver *a*, *b*, *c* tels que pour tout x de $D_f$ : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^2 + 3}$.

b) Montrer que C a une asymptote D et étudier la position de C par rapport à D.

c) Tracez D et C.

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Représenter $(C)$ et $(C')$ la courbe de $f^{-1}$, dans un nouveau repère.

c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

## Exercice 8

1) On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

**a) Calculer P(1) et factoriser P(x).**

**b) Etudier le signe de $P(x)$.**

**2) On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :**

$$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x-2}$$

**et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnée 1 cm pour 2 unités).**

**a) Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2. Préciser les asymptotes verticales et horizontales éventuelles.**

**b) Montrer que $f'(x)=\frac{2P(x)}{(x-2)^2}$.**

**c) Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.**

**3) Pour quelle abscisse $a$ la tangente au point d'abscisse $a$ est-elle horizontale ? Justifier.**

**4)Trouver $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que pour tout x de $D_f$ :**

$$f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}.$$

**5) On appelle $g$ la fonction définie par $g(x)=x^2+2x+1$ et $P$ sa courbe représentative.**

**a) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de f(x) – g(x). Que peut-on en déduire sur les courbes C et P ?**

**b) Etudier la position relative de C et P.**

**c) Tracer C, T et P dans le même repère.**

## IV. CORRIGES DES EXERCICES

**Corrigé 1**

1) $\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}$ :

En remplaçant chaque x par 2 on reconnaît une forme d'indétermination du type « $\frac{0}{0}$ »

Pour lever l'indétermination ici, on factorise et on simplifie par le terme qui s'annule pour x= 2 ; (l'origine de l'indétermination).

Pour factoriser on peut utiliser une identification, une division euclidienne ou le tableau d'Horner.

On obtient

$$\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}=\frac{(x-2)(3x^2-x-1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2-x-1}{x+2},x\neq 2.$$

On remplace après la modification d'écriture :

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-1}{x+2}=\frac{3\cdot 2^2-2-1}{2+2}=\frac{9}{4}.$$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^{10}-3^{10}}{x-3}$ :

Pour lever l'indétermination ici, on peut appliquer un taux d'accroissement :

On pose $u(x)=x^{10}$, donc $u'(x)=10x^9$ et $\frac{x^{10}-3^{10}}{x-3}=\frac{u(x)-u(3)}{x-3}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^{10}-3^{10}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{u(x)-u(3)}{x-3}=u'(3)=10\times 3^9.$$

3) $\lim_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x})$ :

Pour lever l'indétermination ici, on factorise par le terme prépondérant :

Pour $x>0$, $x-\sqrt{x}=x(1-\frac{\sqrt{x}}{x})=x(1-\frac{1}{\sqrt{x}})$ car pour $x>0$, $x=(\sqrt{x})^2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\frac{1}{\sqrt{x}})=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ .

## Corrigé 2

$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Calculons $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ :

**Méthode 1**

Pour faire apparaître le facteur $x-1$ au numérateur, multiplions et divisons f(x) par la quantité conjuguée du numérateur.

Pour $x>0$ et $x\neq1$, $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Or $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\frac{1}{2}$.

**Méthode 2**

Appliquer un taux d'accroissement :

On pose $u(x)=\sqrt{x}$, donc $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f(x)=\frac{u(x)-u(1)}{x-1}$.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{u(x)-u(1)}{x-1}=u'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}.$$

**Méthode 3**

Factoriser et simplifier par $\sqrt{x}-1$ (origine de l'indétermination): Pour $x>0$ et $x\neq1$ on a : $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$,

Donc $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

## Corrigé 3

1) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-x$

Pour lever l'indétermination ici, on procède à un changement d'écriture :

Pour $x>0$,

$$\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{4x^2(1+\frac{1}{4x^2})}=\sqrt{4x^2}\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}=|2x|\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}=2x\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}.$$

Donc pour $x>0$, $f(x)=2x\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-x=x\ (2\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-1)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-1)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

Une factorisation identique à celle de l'exercice précédent ne nous permet pas de conclure. En effet: pour $x>0$, $f(x)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$ et l'application des théorèmes nous ramène à une autre forme indéterminée « $\infty\times 0$ ».

Voici une technique très utilisée pour modifier l'écriture d'une fonction irrationnelle.

Multiplions et divisons f(x) par son expression conjuguée $\sqrt{x^2+1}+x$

(on fait ainsi apparaître au numérateur l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ) :

pour $x>0$, $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

## Corrigé 4

1) L'équation de la tangente est du type $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

On a $f(x)=-x^4+2x^2+x$ donc $f'(x)=-4x^3+4x+1$ d'où $f'(-1)=1$ et

$f(-1)=-1+2-1=0$.

**L'équation de la tangente T est donc $y=1(x+1)+0 \Leftrightarrow y=x+1$.**

**2) Cherchons les points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur celui de T, c'est-à-dire 1 :**

$$f'(x)=1 \Leftrightarrow -4x^3+4x+1=1 \Leftrightarrow -4x^3+4x=0 \Leftrightarrow 4x(-x^2+1)=0$$

**Cette équation a trois solutions : $0, 1$ et $-1$.**

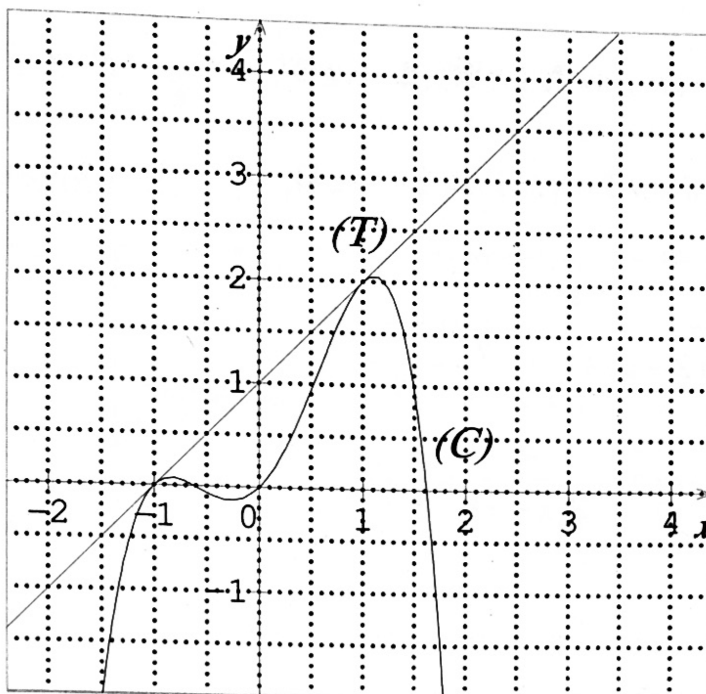
**La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y=x$, équation différente de celle de T.**

**On vérifie par le calcul que : $f'(1)=-4+4+1=1$ et $f(1)=2$ d'où la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation : $y=1(x-1)+2 \Leftrightarrow y=x+1$. C'est bien la même équation de T. Alors T est tangente à (C) en deux points A(–1, 0) et B(1, 2).**

**3) Il suffit de montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet trois solutions $\alpha, \beta$ et $\gamma$ vérifiant : $-0{,}9<\alpha<-0{,}8$, $-0{,}3<\beta<-0{,}2$ et $1{,}1<\gamma<1{,}2$.**

**On a : $f'(x)=-4x^3+4x+1$ . f' est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.**
**Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires :**
**f' est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.**
**$f'(-0{,}9)\simeq 0{,}316$ et $f'(-0{,}8)\simeq -0{,}152 \Rightarrow f'(-0{,}9)\times f'(-0{,}8)<0$. Donc l'équation $f'(x)=0$ admet une solution $\alpha$ telle que $-0{,}9<\alpha<-0{,}8$.**
**$f'(-0{,}3)\simeq 0{,}092$ et $f'(-0{,}2)\simeq -0{,}232 \Rightarrow f'(-0{,}3)\times f'(-0{,}2)<0$. Donc l'équation $f'(x)=0$ admet une solution $\beta$ telle que $-0{,}3<\beta<-0{,}2$.**
**$f'(1{,}1)\simeq 0{,}076$ et $f'(1{,}2)\simeq -1{,}112 \Rightarrow f'(1{,}1)\times f'(1{,}2)<0$. Donc l'équation $f'(x)=0$ admet une solution $\gamma$ telle que $1{,}1<\gamma<1{,}2$.**

**<u>Conclusion :</u>**
**La courbe (C) admet des tangentes horizontales en trois points d'abscisses $\alpha, \beta$ et $\gamma$ vérifiant : $-0{,}9<\alpha<-0{,}8$, $-0{,}3<\beta<-0{,}2$ et $1{,}1<\gamma<1{,}2$.**
**(Voir la figure)**




## Corrigé 5

1) La courbe de la fonction $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ passe par $A(2\ ;\ 4)$ si $f(2)=4$.

Donc $2a+b+c=4$ ;

On a $f'(x)=a-\frac{c}{(x-1)^2}$. Si (C) a une tangente horizontale au point $A(2\ ;\ 4)$,

alors $f'(2)=0$. Donc $a-\frac{c}{(2-1)^2}=0 \Rightarrow a=c$

Si (C) a au point d'abscisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x+4$, alors $f'(3)=1$, (le coefficient directeur de la droite). On a donc

$a-\frac{c}{4}=1$. Alors $a-\frac{a}{4}=1 \Rightarrow a=\frac{4}{3}$.

Donc on a :

$$\begin{cases} 2a+b+c=4 \\ a=c \\ a=\frac{4}{3} \end{cases}$$

Enfin on obtient $a=\frac{4}{3}, b=0$ et $c=\frac{4}{3}$, soit $f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3(x-1)}$.

2) Il suffit de montrer que $\forall x\in D_f, 2-x\in D_f$ et $f(2-x)+f(x)=\frac{8}{3}$.

On a $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 1 \Leftrightarrow 2-x\neq 1 \Leftrightarrow 2-x\in D_f$

On a

$$\begin{aligned} f(2-x)+f(x) &= \frac{4}{3}(2-x)+\frac{4}{3(2-x-1)}+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3(x-1)} \\ &= \frac{8}{3}-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3(x-1)} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Alors le point $\Omega\left(1;\frac{4}{3}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

## Corrigé 6

Soit $g(x)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$.

1) La fonction $g$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Donc f est continue et dérivable sur son domaine de définition.

$$g'(x)=\frac{4}{3}-\frac{4}{3(x-1)^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}\right)=\frac{4}{3}\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow (x=0 \quad \text{ou} \quad x=2)$.

$g(0)=-\frac{7}{3}$ et $g(2)=3$.

Le signe de $g'(x)$ est celui de $x(x-2)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}x-1\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{3}x-1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}(3x-3)=0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} g(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to1^+}(3x-3)=0^+ \Rightarrow \lim_{x\to1^+}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to1^+} g(x)=+\infty$$

**Tableau de variation :**

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g' | | + | 0 | - | \|\| | - | 0 | + | |
| g | $-\infty$ | ↗ | $-7/3$ | ↘ $-\infty$ | \|\| | $+\infty$ ↘ | 3 | ↗ | $+\infty$ |

**2) On a $\lim_{x\to1^-} g(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to1^+} g(x)=+\infty$. Alors la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à (C).**

**D'autre part, on a $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ et**

**$\lim_{x\to\infty}\left(g(x)-\left(\frac{4}{3}x-1\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{3x-3}=0$. Alors la droite D d'équation $y=\frac{4}{3}x-1$ est une asymptote oblique à (C).**

**Pour étudier la position de (*D*) par rapport à (*C*), on étudie le signe de $d(x)=g(x)-\left(\frac{4}{3}x-1\right)$. Le signe de d(x) est celui de $3x-3$ car $d(x)=\frac{4}{3x-3}$.**

**Lorsque $x>1$, $\frac{4}{3x-3}$ est positif, (C) est au dessus de D, lorsque $x<1$, $\frac{4}{3x-3}$ est négatif,(C) est en dessous de D.**

**3) L'équation de (T) : $y=g'(3)(x-3)+g(3)$**

$$y=1(x-3)+\frac{11}{3}$$

$$y=x+\frac{2}{3}.$$

**Pour déterminer la position de (T) par rapport à (C) on a :**

$$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3(x-1)}-x-\frac{2}{3}$$

$$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}+\frac{4}{3(x-1)}$$

$$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{x^2-6x+9}{3(x-1)}$$

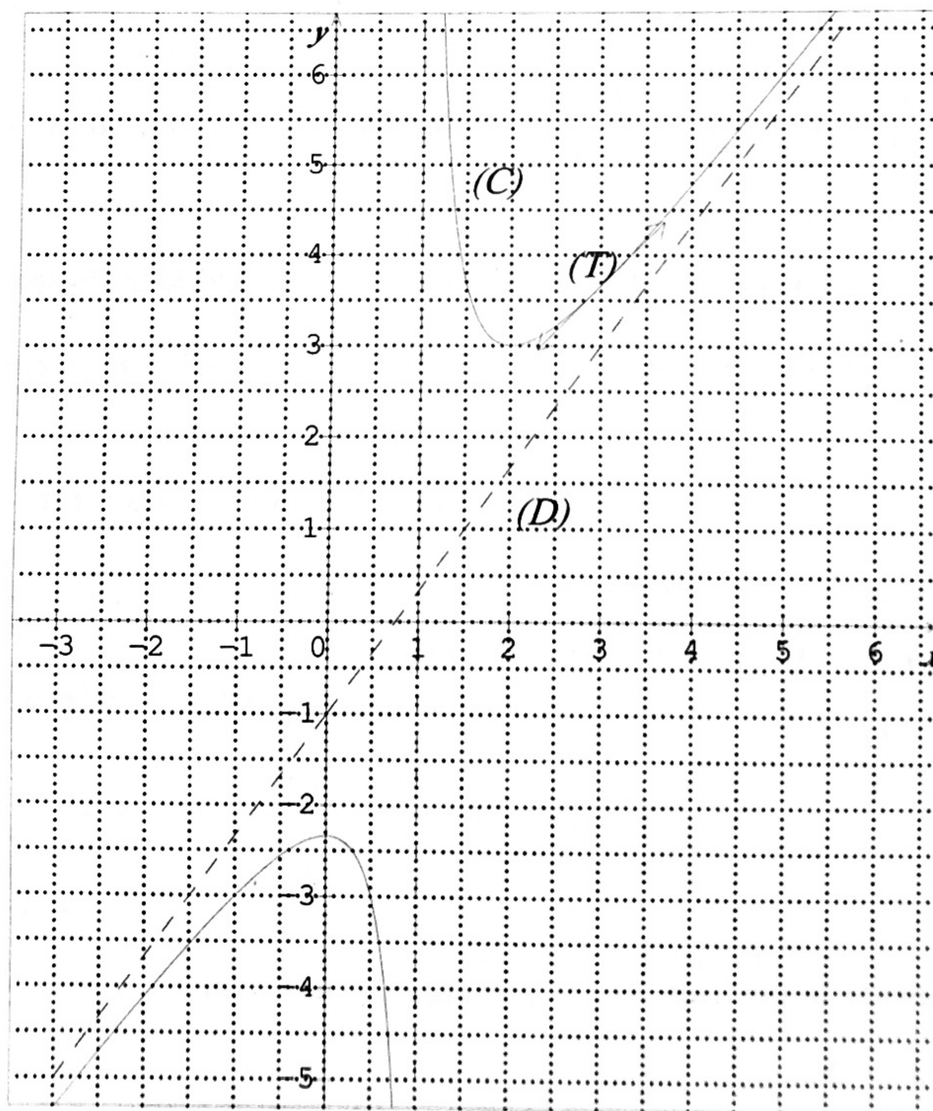
$$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{(x-3)^2}{3(x-1)}.$$

**Le signe est celui du numérateur :**

**Lorsque $x > 1$, $\frac{(x-3)^2}{3(x-1)}$ est positif, (C) est au dessus de T, lorsque $x < 1$,**

**$\frac{(x-3)^2}{3(x-1)}$ est négatif, (C) est en dessous de T.**

**4) Représentation graphique**



5) L'équation $4x^2-(3m+7)x+3m+7=0$ équivaut à

$4x^2-3mx-7x+3m+7=0 \Leftrightarrow 4x^2-7x+7=3m(x-1)$

$$\Leftrightarrow m=\frac{4x^2-7x+7}{3(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$$

$$\Leftrightarrow m=g(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=m \\ y=g(x) \end{cases}$$

Le nombre de solutions de cette équation est le nombre de points d'intersections de la courbe (C) de g avec la droite (horizontale) $\Delta_m$ d'équation $y=m$.

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de (C) et $\Delta_m$

D'après la représentation graphique de g, on déduit le tableau suivant :

| valeurs du paramètre m | nombre d'intersection de (C) et $\Delta_m$ | nombre de solutions |
|---|---|---|
| $m<-\frac{7}{3}$ | 2 | 2 |
| $m=-\frac{7}{3}$ | 1 (tangente) | 1 |
| $-\frac{7}{3}<m<3$ | 0 | 0 |
| $m=3$ | 1 (tangente) | 1 |
| $m>3$ | 2 | 2 |

Pour retrouver ces résultats algébriquement, on étudie le signe du discriminant de l'équation $4x^2-(3m+7)x+3m+7=0$.

$\Delta = (3m+7)^2 - 16(3m+7) = (3m+7)(3m-9)$. **Le discriminant s'annule pour deux valeurs :** $m = -\frac{7}{3}$ **et** $m = 3$.

| valeurs du paramètre m | Signe du $\Delta = (3m+7)(3m-9)$ | nombre de solutions |
|---|---|---|
| $m < -\frac{7}{3}$ | $\Delta > 0$ | 2 |
| $m = -\frac{7}{3}$ | $\Delta = 0$ | 1 |
| $-\frac{7}{3} < m < 3$ | $\Delta < 0$ | 0 |
| $m = 3$ | $\Delta = 0$ | 1 |
| $m > 3$ | $\Delta > 0$ | 2 |

## Corrigé 7

**1) Soit** $P(x) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$.

**On remarque que** $P(1) = 1 + 6 - 16 + 9 = 0$. **Donc 1 est une racine évidente de P. On peut alors factoriser P(x) par (x – 1) :**

**On peut utiliser le tableau d'Horner :**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 6 | -16 | 9 |
| 1 | | 1 | 1 | 7 | -9 |
| | 1 | 1 | 7 | -9 | 0 |

**Donc** $P(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + 7x - 9)$

**On remarque que 1 est une racine évidente de** $x^3 + x^2 + 7x - 9$,

On peut utiliser de nouveau le tableau d'Horner :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 7 | -9 |
| 1 | | 1 | 2 | 9 |
| | 1 | 2 | 9 | 0 |

Ce qui donne $x^3+x^2+7x-9=(x-1)(x^2+2x+9)$.

Enfin on obtient : $P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+9)$.

Le discriminant du trinôme $x^2+2x+9$ est négatif : $\Delta=4-36=-32$, donc le trinôme est du signe de (+1), positif.

Conclusion : $P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+9)$ est toujours positif.

2.a) La fonction $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}$ est de domaine de définition $D_f=\mathbb{R}$ puisque $x^2+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) La fonction f est rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition.

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2x+3)(x^2+3)-(x^3-x^2+3x+5)(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^4+6x^2-16x+9}{(x^2+3)^2} \text{ d'où } f'(x)=\frac{P(x)}{(x^2+3)^2}$$

c) D'après 1) on a $\forall x\in D_f, P(x)\geq 0$. Alors $\forall x\in D_f, f'(x)\geq 0$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

Tableau de variations de f :

| x | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| f'(x) | + |
| f(x) | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

**3.a) On utilise une identification pour déterminer les réels a,b et c tels que :**

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + 3}.$$

$$ax + b + \frac{c}{x^2 + 3} = \frac{ax^3 + bx^2 + 3ax + 3b + c}{x^2 + 3}$$

$$\frac{ax^3 + bx^2 + 3ax + 3b + c}{x^2 + 3} = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3},$$

**Par identification :** $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ 3a = 3 \\ 3b + c = 5 \end{cases}$

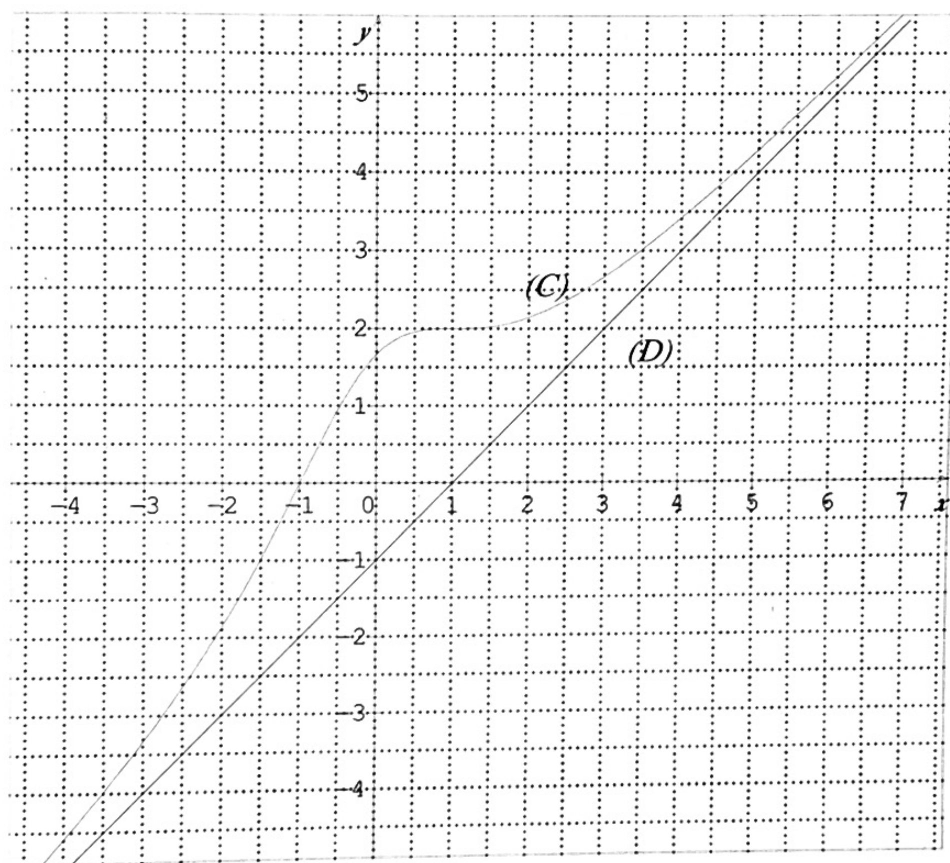
**On obtient donc :** $a = 1, b = -1, c = 8$.

**Alors** $\forall x \in D_f$, **on a :** $f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^2 + 3}$.

**b) Or** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (x - 1)\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{8}{x^2 + 3} = 0$, **on en déduit que la droite D d'équation** $y = x - 1$ **est une asymptote à (C).**

**Comme** $f(x) - (x - 1) = \frac{8}{x^2 + 3} > 0$, $\forall x \in D_f$, **la courbe (C) est au-dessus de D toujours.**

c) **Représentation graphique :**




**4.a) D'après l'étude de f et son tableau de variations on a :**

- **f est continue sur** $]-\infty;+\infty[$ **;**
- **f est strictement croissante (monotone) sur** $]-\infty;+\infty[$ **;**
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

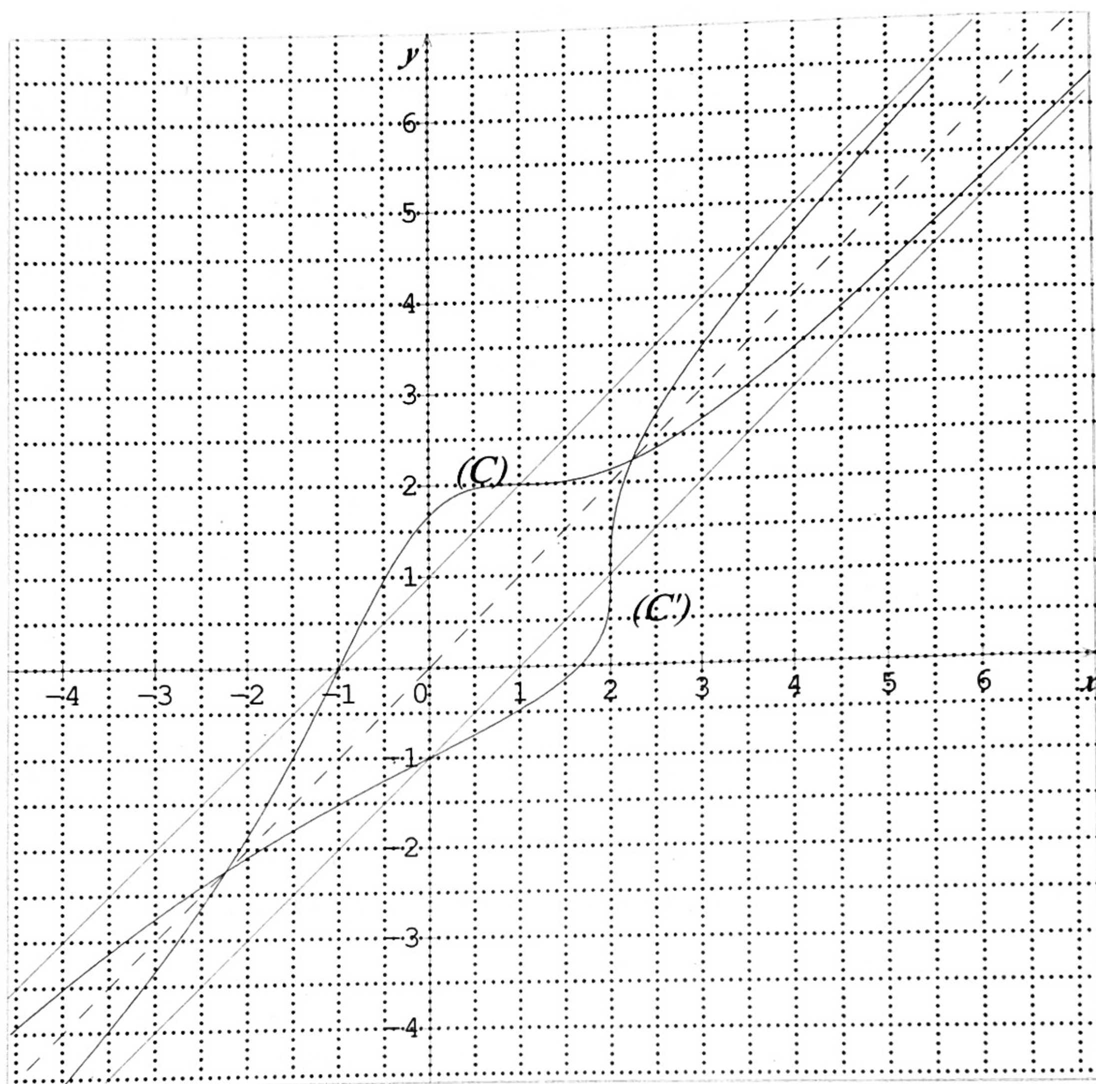
**Donc** $f : ]-\infty;+\infty[ \longrightarrow J = ]-\infty;+\infty[$ **réalise une bijection.**

**b) Construction :**

**Les courbes (C) et (C') sont symétriques l'une à l'autre par rapport à la droite d'équation** $y = x$ **:**

| La courbe (C) | La courbe (C') |
|---|---|
| Admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ | Admet une asymptote oblique d'équation $x = y - 1$ soit $y = x + 1$ |
| Coupe (Oy) en $(0;\frac{5}{3})$ | Coupe (Ox) $(\frac{5}{3};0)$ |

| | |
|---|---|
| Coupe (Ox) en (-1,0) | Coupe (Oy) en (0,-1) |




c) On a $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}$.

$f^{-1}(0)=-1$ car $f(-1)=0$, et $f'(x)=\dfrac{x^4+6x^2-16x+9}{(x^2+3)^2}\Rightarrow f'(-1)=2$.

Donc $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{2}$.

| Corrigé 8 |
|---|

1.a) On a $P(x)=x^3-3x^2+2\Rightarrow P(1)=1-3+2=0$.

En utilisant la division euclidienne (ou le tableau d'Horner ou l'identification) on obtient : $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$.

b) Pour le trinôme $(x^2-2x-2)$, on a $\Delta=12=(2\sqrt{3})^2$ d'où les racines $x_1=1-\sqrt{3}, x_2=1+\sqrt{3}$

**Tableau de signes :**

| x | $-\infty$ | $1-\sqrt{3}$ | 1 | $1+\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| x-1 | - | - | + | + | |
| $x^2-2x-2$ | + | - | - | + | |
| P(x) | - | + | - | + | |

2) $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$

a) Calcul de limites :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$. Il n y a pas d'asymptote horizontale.

$\lim\limits_{x\to2}(x^3-3x+2)=4>0$. Alors :

$\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)=0^-\Rightarrow\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0^+\Rightarrow\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$.

Alors la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.

b) Calcul de la dérivée :

On a $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$. Alors :

$$f'(x)=\frac{(3x^2-3)(x-2)-(x^3-3x+2)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3-3x-6x^2+6-x^3+3x-2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-6x^2+4}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2P(x)}{(x-2)^2}$$

c) Le sens de variation de $f$ dépend uniquement du signe de $P$. On a donc le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{3}$ | | $1$ | | $2$ | | $1+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $y_1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\|\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $y_2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$y_1 = f(1-\sqrt{3}) \simeq -1{,}4$ et $y_2 = f(1+\sqrt{3}) \simeq 19{,}3$.

3) La tangente est horizontale lorsque la dérivée s'annule, soit pour $1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

4) Si pour tout x de $D_f$ :

$$ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}=\frac{ax^3-2ax^2+bx^2-2bx+cx-2c+d}{x-2} \text{ alors}$$

$$ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c+d}{x-2}$$

$$f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x^3-3x+2}{x-2}=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c+d}{x-2}$$

par identification des coefficients : $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ c-2b=-3 \\ d-2c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2a=2 \\ c=2b-3=1 \\ d=2c+2=4 \end{cases}$

Alors $f(x)=x^2+2x+1+\dfrac{4}{x-2}, \forall x \in D_f$.

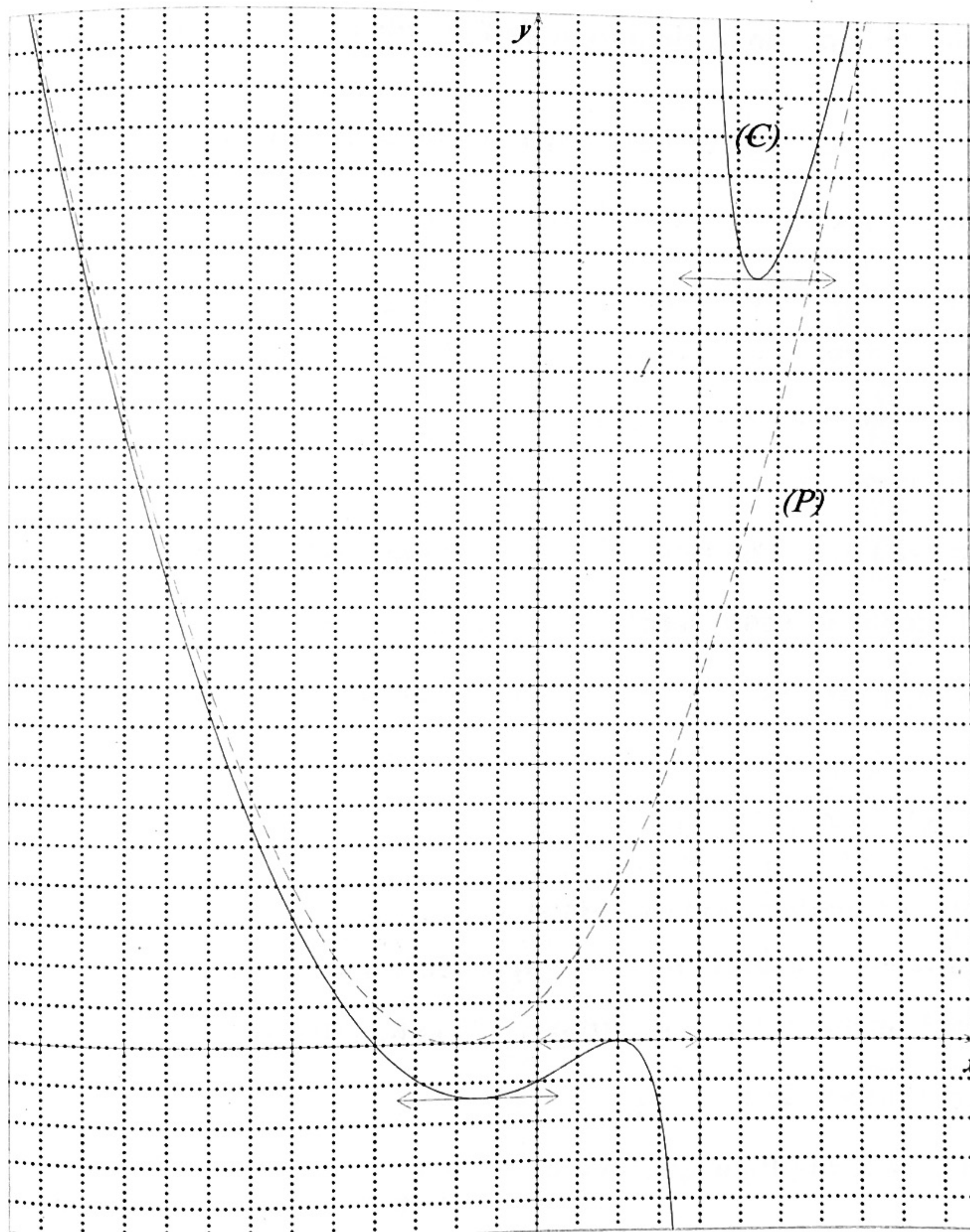
5. a) On a : $f(x)-g(x)=\dfrac{4}{x-2}$.

Alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$. Donc les deux courbes sont asymptotes.

b) Pour la position relative, il est clair que le signe de $f(x)-g(x)$ est celui de $\frac{4}{x-2}$ :

$x<2 \Rightarrow f(x)-g(x)<0$ et C est en dessous de P

$x>2 \Rightarrow f(x)-g(x)>0$ et C est au-dessus de P.



# V. EXERCICES DE SYNTHESE

**Exercice 1**

**Soit f la fonction numérique définie par** $f(x)=\frac{x^2+3x+3}{2x+2}$ **et** $(C)$ **sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.**

**1.a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de ce domaine.**

**b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation**

**2.a) Déterminer les réels** $a, b$ et $c$ **tels que** $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+2}$

**b) En déduire que** $(C)$ **admet une asymptote oblique** $\Delta$**, dont on donnera l'équation.**

**c) Etudier la position relative entre** $(C)$ **et** $\Delta$

**3. a) Construire la courbe** $(C)$ **et ses asymptotes.**

**b) Montrer que** $(C)$ **admet un centre de symétrie que l'on précisera.**

**4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle** $I=]0,+\infty[$

**a) Montrer que g est une bijection de** $]0,+\infty[$ **sur un intervalle Jque l'on déterminera.**

**b) Déterminer** $g^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$ **et** $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{7}{4}\right)$.

**c) Montrer que l'équation** $g(x)=x$ **admet une unique solution** $\alpha$ **que l'on déterminera la valeur exacte et une valeur approchée à** $10^{-2}$ **près.**

**d) Tracer, dans le même repère, la courbe** $(C')$ **de la fonction** $g^{-1}$ **.**

**5) On considère l'intervalle** $K=[2;3]$

**a) Montrer que,** $x\in K$ **implique que** $\forall x\in K$ **,** $f(x)\in K$

**b) Montrer que** $\forall x\in K$ **,** $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

**6) Soit** $(u_n)$ **la suite définie par** $u_0=2$ **et** $u_{n+1}=g(u_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$ .

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

d) En déduire la limite de $(u_n)$.

## Exercice 2

**Partie A**

Soit la fonction numérique définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Dresser le tableau de variation de $g$ .

2) Montrer que l'équation $g(x)= 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$ et que $2 < \alpha < 3$ .

3) Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ .

**Partie B**

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et soit $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.a) Calculer $\lim_{x \to -1^-} f(x)$, $\lim_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2.a) Montrer que $\forall x \in D_f$, $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}$

b) En déduire que la courbe $(C)$ admet une asymptote oblique $\Delta$ à préciser puis étudier la position relative de $(C)$ et $\Delta$ .

c) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Montrer que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ . En déduire le signe de $f'(x)$ sur $D_f$ (On pourra utiliser A.3).

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Déterminer les points de $(C)$ où la tangente est parallèle la droite d'équation $y = x + 2$ .

6) Donner une équation de la tangente de $(C)$ en $x_0 = -2$

7) Construire la courbe $(C)$

8) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = ]-\infty;-1[$

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $(h^{-1})'(0)$.

## Exercice 3

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Déterminer les réels a ;b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$, $\forall x \in D_f$

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Montrer que C admet deux asymptotes D et D' dont l'une D est oblique.

Etudier les positions relatives de D et (C)

4.a) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b) Existe-t-il des points de (C) où la tangente est perpendiculaire à l'asymptote oblique D ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.

5) Vérifier que pour tout x de $D_f$ on a $f(4-x)+f(x)=2$ et interpréter graphiquement.

6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = ]0;2[$.

a) Montrer que $g : I \to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variations de $g^{-1}$.

c) Calculer $(g^{-1})'(-4)$. Donner, par deux méthodes différentes l'équation de la droite T' tangente à (C') courbe de $g^{-1}$ au point d'abscisse $x_0 = -4$.

**7.a) Tracer les courbes (C) et (C').**

**b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x^2-(3+m)x+6+2m=0$. Retrouver ces résultats algébriquement.**

## Exercice 4

**On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$ et sa courbe (C) dans un repère orthonormé.**

**1) Trouver *a*, *b* et *c* tels que $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$.**

**2) Déterminer l'ensemble de définition de f. Etudier la parité et les variations de f.**

**3) Calculer les limites de f aux bornes de $D_f$. Préciser les asymptotes à (C).**

**4) Etudier la position de (C) par rapport à la droite D d'équation ($y=x$).**

**5) Tracer D et C.**

**6) Résoudre l'équation $f(x)=0$.**

## Exercice 5

**Soit la fonction *f*, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et *C* sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm)**

**<u>Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.</u>**

**Soit *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$.**

**1) Dresser le tableau de variations de la fonction *g*.**

**2) Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ unique tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $2\le\alpha\le 3$ puis déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $5.10^{-1}$ près.**

**3) Etudier le signe de *g(x)* sur $\mathbb{R}$.**

**<u>Partie B : Etude de la fonction *f*.</u>**

**1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.**

**2) Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$, $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.**

**3) Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$, $f(x)=x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$. En déduire que *C* admet une asymptote oblique *D* à l'infini. Etudier la position de *C* par rapport à *D*.**

**4) Déterminer les abscisses des points de *C* où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x+2$**

**5) Tracer la droite *D*, les tangentes du 4. ainsi que la courbe *C*.**

**6) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=[3,+\infty[$.**

**a) Montrer que $h:I\to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.**

**b) Dresser le tableau de variations de $h^{-1}$.**

**c) Calculer $(h^{-1})'(\dfrac{45}{8})$.**

## Exercice 6

**Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.**

**On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.**

**1) Déterminer les réels a ;b et c tel que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ pour tout $x\in D_f$.**

**2) Dresser le tableau de variations de f. Justifier que la courbe C n'admet pas de tangentes horizontales.**

**3) Montrer que C admet deux asymptotes et que leur point d'intersection est un centre de symétrie de C.**

**4) Etudier les positions relatives de C et son asymptote oblique.**

**5) Préciser les points d'intersections de C avec les axes.**

**6) On considère la droite D d'équation $2x-y-1=0$.**

**Existe-t-il des points de C où la tangente est parallèle à D ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.**

**7) Tracer la courbe C.**

**8) Soit k la restriction de f sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$.**

**a) Montrer que k réalise une bijection de $\left]-1,+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.**

**b) Construire dans un nouveau repère orthonormé, les courbes représentatives de k et de sa réciproque .**

**c) Calculer $k^{-1}(0)$, $(k^{-1})'(0)$.**

**d) Donner l'équation de la tangente T' à la courbe C' de $k^{-1}$ au point d'abscisse 0.**

## Exercice 7

**Soit f la fonction définie par $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé**

**1) Montrer que pour tout x : $f(-x)=2-f(x)$ ; Interpréter graphiquement.**

**2) Montrer que le point de coordonnées $(0;1)$ est un point d'inflexion.**

**3) Etudier les variations de f.**

**4)Tracer la courbe de f.**

**a) Montrer que f admet une fonction réciproque $f^{-1}$**

**b) Donner l'expression de $f^{-1}$**

**c) Dresser le tableau de variation de $f^{-1}$ Tracer sa courbe.**

## Exercice 8

**On considère la fonction numérique $f(x)=\sqrt{\left|x^2+3x-10\right|}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.**

**1) Ecrire f sans valeur absolue**

**2) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe (C)**

**3) Dresser le tableau de variation**

**4) Montrer que la partie de (C) sur $[-5,2]$ est un demi cercle à préciser.**

**5) Tracer (C).**

## Exercice 9 (Traduit)

| | |
|---|---|
| Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. | لتكن الدالة العددية $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$ وليكن (C) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ . |
| 1) Déterminer $D_f$ le domaine de définition de f. Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall x\in D_f;\quad f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$. | 1) حدد ميدان التعريف $D_f$ وعين الأعداد الحقيقية a,b,c بحيث يكون: $\forall x\in D_f;\quad f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$. |
| 2) Dresser le tableau de variations de f. | 2) ارسم جدول تغيرات f . |
| 3) Montrer que la courbe C possède deux asymptotes D et D' dont l'une est oblique D. Préciser les position relatives de C et D. | 3) بين أن (C) يقبل مقاربين D و D' أحدهما مائل D ، ثم حدد الوضع النسبي للمنحني (C) ومقاربه D. |
| 4) Donner une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse $x_0=-2$. | 4)أوجد معادلة المماس T للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=-2$. |
| 5.a) Existe-t-il des points de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $3x+y+1=0$. | a.5) هل توجد نقط من (C) يكون المماس فيها موازيا للمستقيم ذي المعادلة $3x+y+1=0$؟ |
| b) Existe-t-il des points de C où la tangente est perpendiculaire à l'asymptote oblique D. | b) هل توجد نقط من (C) يكون المماس فيها عموديا على المقارب المائل D ؟ |
| 6.a) Montrer que la courbe (C) admet le point $\Omega(1,3)$ comme centre de symétrie. | a.6) بين أن المنحنى (C) يملك مركز تناظر هو النقطة $\Omega(1,3)$ . |
| b) Tracer la courbe (C) après avoir placé ses éléments géométriques associés dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. | b) مثل المنحنى (C) بعد وضع العناصر الهندسية المساعدة في المرجع $(O;\vec{i},\vec{j})$. |
| 7.a) Discuter algébriquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x^2+(1-m)x+2+m=0$. | a.7) ناقش جبريا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $x^2+(1-m)x+2+m=0$ |
| b) Retrouver les résultats précédents graphiquement. | b) أوجد النتائج السابقة بيانيا. |

**Dépôt légal N° 2176/2020**

**Bibliothèque nationale**

**Nouakchott**

# ESSEBIL Au Bac

## Mathématiques

*Dans les ouvrages de la collection ESSEBIL AU BAC-Mathématiques vous trouverez chaque trimestre:*

- ✓ **Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules**
- ✓ **Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme**
- ✓ **Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances**
- ✓ **Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac**
- ✓ **Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.**

*Dans les ouvrages de la collection*

***ESSEBIL AU BAC – Mathématiques***

*vous trouverez chaque trimestre:*
*Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules,*
*Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme,*
*Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances,*
*Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac.*

*L'AUTEUR*
*Dr. Horma Ould Hamoud*
*•Titulaire d'un CAPES de l'ENS (Nouakchott,1990),*
*•Docteur en Mathématiques (Spécialité Algèbre, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal, 2002),*
*•Précédemment enseignant à l'ENS et à l'Université de Nouakchott (FST et FSJE),*
*•Inspecteur de Mathématiques depuis janvier 2002 en service à l'Inspection Générale de l'Education Nationale (Nouakchott, Mauritanie),*
*•Coordinateur de la commission de réécriture des programmes de mathématiques et informatique de l'enseignement secondaire.*
*•Formateur de professeurs et producteur de ressources éducatives et numériques (curriculum, documents d'accompagnement, supports de formation, cours en ligne, formation à distance, applications mobiles, etc ...),*
*•Membre de la commission nationale chargée des olympiades et rallyes de Maths. Coordinateur de l'équipe de mathématiques.*
*•Auteur de plusieurs manuels scolaires de mathématiques (cours, exercices corrigés, formulaire, ...) du collège à la terminale,*
*•Président et membre fondateur de l'ONG Association des Amis de Mathématiques (AMIMATH),*

*•Site web : https://maurimath.net/*